ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1991

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

n désigne un entier strictement positif. On abrège "variable aléatoire réelle" en "v.a.".

I

On considère un couple (X,Y) de v.a. discrètes indépendantes définies sur le même univers muni de la probabilité Pr. On suppose que X et Y suivent la même loi uniforme sur l'ensemble
$\Omega_n = \{-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\} = \mathbb{Z} \cap [-n, n]$, c'est-à-dire, l'ensemble des valeurs prises par X (resp. Y) est exactement Ω_n et chaque élément de Ω_n est pris avec la même probabilité.

1. Donner l'expression de la loi de X. Comparer la loi des v.a. X et -X.

2. Déterminer la loi de la v.a. Z = X + Y.

3. Calculer la fonction de répartition F de la v.a. |Z| ("valeur absolue de Z"). En déduire la loi de |Z|. Calculer l'espérance et la variance de |Z|.

4. Déterminer la loi de la v.a. W = X - Y.

5. Calculer la covariance de Z et W. Les v.a. Z et W sont-elles indépendantes ? Donner la loi du couple (Z,W).
Application numérique : n = 2 : dresser le tableau de la loi conjointe et des lois marginales du couple (Z,W).

II

Dans cette partie II, on cherche une expression sous forme intégrale de la fonction F définie au I.3..
On note N_k le nombre de couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \cap [-n, n]^2$, vérifiant $x + y = k$.

1. Exprimer en fonction de N_k le coefficient de z^k dans le développement de l'expression $(z^{-n} + z^{-n+1} + \ldots + z^{-1} + 1 + z + z^2 + \ldots + z^n)^2$.

2. Soit z le nombre complexe $z = e^{it}$ $(t \in \mathbb{R})$. Exprimer la somme $\sum_{k=-n}^{n} z^k$ sous la forme $\frac{\sin\left(p(n).t/2\right)}{\sin\,(t/2)}$ où p(n) est un entier dépendant de n, à calculer.

3. Démontrer l'égalité : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=-2n}^{2n} N_j\, e^{itj}\right) e^{-ikt}\,dt = N_k$.

4. On appelle A_k le nombre de couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \cap [-n, n]^2$, vérifiant $-k \leqslant x + y \leqslant k$.
Etablir la formule $A_k = c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left[(2n+1)u\right]\ \sin\left[(2k+1)u\right]}{\sin^3 u}\,du$
(c constante à déterminer).
En déduire une expression de F(k) sous forme intégrale.

5. Soit $(X_1, \ldots, X_p)$ un p-uplet de v.a. discrètes indépendantes suivant chacune la même loi uniforme sur l'ensemble $\Omega_n = \mathbb{Z} \cap [-n, n]$.
On note $Z_1 = X_1 + \ldots + X_p$. En s'inspirant des questions précédentes trouver une expression de la fonction de répartition de (Z_1) faisant intervenir une intégrale.

III

Les v.a. intervenant dans cette partie admettent toutes une fonction de densité.
On dira qu'une v.a. X est symétrique si et seulement si
$\forall x \in \mathbb{R}$, $Pr(X < x) = Pr(X > -x)$.

1. a. Soit X une v.a. symétrique. Que peut-on dire de la fonction de répartition de X ? D'une fonction de densité de X ? Quelle est la loi de la v.a. -X ?

   b. Soient X et Y deux v.a. symétriques indépendantes. Les v.a. X + Y et X - Y suivent-elles la même loi ? Même question pour X + Y et -X - Y.
   Qu'en est-il si l'on suppose les v.a. X et Y symétriques, non indépendantes ? Justifier vos réponses.

Dans la suite du problème, (X,Y) est un couple de v.a. indépendantes suivant chacune la même loi uniforme sur $[-1, +1]$.

2. Déterminer la loi de la v.a. Z = X + Y, son espérance et sa variance.

3. Déterminer la loi de la v.a. |Z|, son espérance et sa variance.

4. Soit W = X - Y. Déterminer la loi de W, son espérance et sa variance.

5. Calculer le coefficient de corrélation de Z et W. Les v.a. Z et W sont-elles indépendantes ? Déterminer la loi du couple (Z,W) en donnant une fonction de densité de ce couple.

FIN